



## 用静态拉伸法与 SPSS 标定钢丝杨氏模量\*

岩 稳 王新春 祝飞霞 王昆林 司民真

(楚雄师范学院 云南 楚雄 675000)

(收稿日期:2013-10-24)

**摘 要:**针对测量杨氏模量的实验装置,用光放大原理,从理论上推导出系统长度、质量的复合量与系统标尺刻度差存在线性关系,采用静态拉伸法测量实验数据,引入 SPSS 的曲线估计功能分析实验数据,得到系统长度、质量的复合量与系统标尺刻度差的定标曲线,并验证出复合量与标尺刻度差具有线性关系,由此标定出钢丝的杨氏模量,用置信概率为 95% 的不确定度,对测量数据和实验结果进行分析和评估,最终得到更为可靠、合理的实验结果。

**关键词:**静态拉伸法 光放大原理 不确定度 SPSS 曲线估计 杨氏模量

杨氏模量是表征固体材料性质的重要物理量,是工程技术中机械构件选材时的重要参数,也是理工类大学物理实验的重要内容之一<sup>[1]</sup>。杨氏模量的测定是大学物理实验中的重要实验。在传统镜尺法<sup>[2]</sup>基础之上,逐步形成了一些新的实验方法<sup>[3~6]</sup>,但这些新的实验方法普遍存在着实验系统相对复杂,实验成本较高的情况,或者易受外界环境(温度、湿度、电磁)的影响。因此,高等学校实验教材中普遍采用的还是传统的静态拉伸实验方法,但该方法处理实验数据的方法较为陈旧,即实验引入的不确定度的置信概率较低(一般为正态分布的 68.3%)。为此,用置信率为 95% 的不确定度对实验数据及其结果进行分析与评定,引入 SPSS<sup>[7]</sup> 曲线估计功能分析实验数据,试图减小人为因素和仪器因素带来的偶然误差和系统误差,提高对实验数据及实验结果分析的精度,可得到更为合理的实验结果。

## 1 实验仪器及调试

实验装置如图 1 所示,实验仪器主要由 YMC-1 型杨氏模量测定仪、JCW-1 型尺读望远镜、光杠杆、砝码等组成。旋紧上卡头固定钢丝,调节减震台与下卡头等高,选定钢丝在合适的长度内,将水平仪放置于防震台的不同位置,反复调节支架螺钉使杨氏模

量测定仪处于平衡状态,加上本底砝码,调节望远镜与光杠杆镜面使其等高,采用逐步增减砝码的测量方案进行测量,测量时增减砝码要注意轻拿轻放,尽量减少实验过程中的误差。

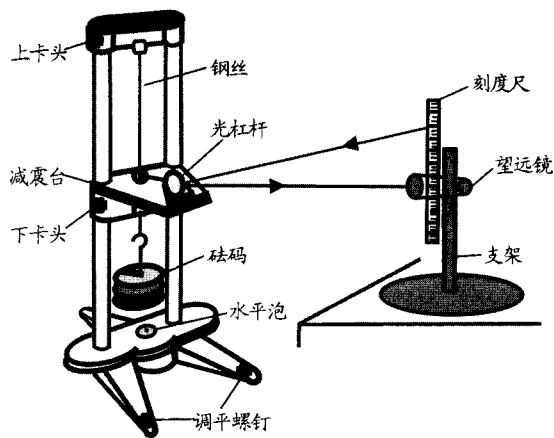


图 1 杨氏模量测定仪器

## 2 实验原理

### 2.1 测量原理

由胡克定律可知,在弹性限度内,弹性的应力与应变成正比。假设钢丝的长度为  $L$ ,横截面积为  $S$ ,在钢丝的长度方向上施加外力  $F$ ,在力  $F$  的作用下钢丝伸长了  $\delta$ ,钢丝单位面积上受到的垂直作用力  $\frac{F}{S}$  称为正应力,钢丝相对伸长量  $\frac{\delta}{L}$  称为线应变。

\* 国家特色专业项目资助,项目编号:12467

则<sup>[8]</sup>

$$\frac{F}{S} = E \frac{\delta}{L} \quad (1)$$

式(1)中  $E$  为杨氏弹性模量, 单位为  $\text{N} \cdot \text{m}^{-2}$ , 若钢丝的直径为  $d$ ,  $S = \frac{1}{4}\pi d^2$ , 则

$$E = \frac{4FL}{\pi d^2 \delta} \quad (2)$$

式(2)表达了金属材料抵抗外力拉伸(或压缩)形变的能力. 由于在外力  $F$  作用下金属丝的微小伸长量  $\delta$  比较小, 不容易测准, 因而, 利用光放大原理对  $\delta$  进行测量.

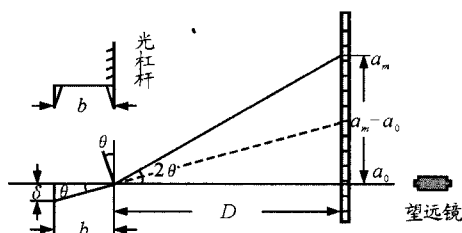


图2 光放大原理

如图2所示,  $b$  为光杠杆前、后足尖的垂直距离,  $D$  为光杠杆平面镜到直尺之间的距离,  $d$  为金属丝的直径, 设加砝码  $m$  金属丝伸长  $\delta$ , 加砝码前(已有本底砝码, 目的是使金属丝伸直)望远镜中标尺读数为  $a_0$ , 加砝码后望远镜中标尺的读书为  $a_m$ .  $a_m - a_0$  为标尺的刻度变化范围, 在  $2\theta$  很小时, 有

$$\tan 2\theta \approx 2\theta \quad \tan \theta \approx \theta$$

而

$$\tan 2\theta \approx \frac{a_m - a_0}{D} \quad \tan \theta \approx \frac{\delta}{b}$$

那么

$$2\theta = 2 \frac{\delta}{b} = \frac{a_m - a_0}{D}$$

则

$$\delta = \frac{(a_m - a_0)b}{2D} \quad (3)$$

若负重  $F = mg$ , 由式(2)、(3)可得

$$E = \frac{8mgLD}{\pi d^2 b(a_m - a_0)} \quad (4)$$

在式(4)中, 令标尺刻度差  $W = (a_m - a_0)$ , 长度-质量复合量

$$Z = \frac{8mgLD}{\pi d^2 b}$$

可简化得

$$Z = EW \quad (5)$$

实验中, 用5 m 卷钢尺测得  $L$  和  $D$ , 用50分度游标卡尺测得  $b$ , 螺旋测微器测得  $d$ , 从而, 可得长度-质量复合量 ( $Z_i$ ), 用望远镜和光杠杆可读出  $a_m$  和  $a_0$ , 因而可得  $W_i$ . 应用 SPSS 的曲线估计功能, 试图分析标尺刻度差 ( $W_i$ ) 与长度-质量复合量 ( $Z_i$ ) 的线性相关性, 由此标定出钢丝的杨氏模量, 并对其不确定度进行估算.

## 2.2 杨氏模量的不确定度分析<sup>[9]</sup>

对于直接测量量  $y$ , 不确定度用 A 类、B 类进行评定. 测量平均值的标准偏差为

$$u(\bar{y}) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}{n(n-1)}} \quad (6)$$

对 A 类, 若测量为 6 次, 测量结果服从  $t$  分布, 当  $p = 0.95$  时,  $t_p = 2.57$ , 即

$$u_A(\bar{y}) = 2.57u(\bar{y}) \quad (7)$$

式(7)中的  $\bar{y}$  可以分别代表  $L, D, b, d, a_m - a_0$ .

对于 B 类分量, 若其误差极限为  $\Delta$ , 仪器误差服从均匀分布  $C = \sqrt{3}$ , 当  $p = 0.95$  时,  $k_p = 1.96$ , 那么

$$u_B(k) = 1.96 \frac{\Delta_k}{\sqrt{3}} \quad (8)$$

式(8)中的  $k$  可分别代表  $L, D, b, d, a_m - a_0$ , 其合成不确定度为

$$u(y) = \sqrt{u_A^2(\bar{y}) + u_B^2(y)} \quad (9)$$

对间接测量  $k = f(y_1, y_2, \dots, y_i, \dots, y_m)$ , 则  $y$  的标准不确定度  $u_c(k)$  为

$$u_c(k) = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial k}{\partial y_i} \right)^2 u^2(y_i)} \quad (10)$$

$k$  的相对不确定度  $u_r(k)$  为

$$u_r(k) = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left[ \frac{\partial(\ln k)}{\partial y_i} \right]^2 u^2(y_i)} \quad (11)$$

根据式(5)、(11), 杨氏模量  $E$  的合成不确定度  $u_r(E)$  为

$$u_r(E) = \sqrt{\left[ \frac{u(W)}{W} \right]^2 + \left[ \frac{u(Z)}{Z} \right]^2} \quad (12)$$

### 3 实验数据处理及结果

#### 3.1 数据测量及其结果表示

表1 对  $D, L, b, d$  长度的测量结果

测量对象	测量工具	测量方式	测量结果	不确定度 $u_r/\%$
$D/cm$	5 m 钢卷尺	单次测量	$400.02 \pm 0.11$	0.28
$L/cm$	5 m 钢卷尺	单次测量	$65.53 \pm 0.11$	0.17
$b/cm$	50 分度游标卡尺	多次测量	$7.536 \pm 0.02$	0.30
$d/mm$	螺旋测微器	多次测量	$0.851 \pm 0.011$	1.3

表2 不同负重质量对应的标尺刻度值

$g = 9.78 \text{ m/s}^2$        $\Delta a = 0.1 \text{ cm}$        $\Delta m = 0.02 \text{ g}$

$i/\text{组}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$m_i/\text{kg}$	2.000	4.000	6.000	8.000	10.000	12.000	14.000	16.000	18.000
$a_{0i}/\text{cm}$	12.00	12.00	12.00	12.00	12.00	12.00	12.00	12.00	12.00
$a_{mi}/\text{cm}$	13.34	14.42	15.51	16.68	17.82	19.18	20.42	21.56	22.68

表3 系统  $W_i$  与  $Z_i$  的实验数据

$i/\text{组}$	$W_i/(\times 10^{-2} \text{ m})$	$Z_i/(\times 10^{10} \text{ kg} \cdot \text{s}^{-2})$
1	1.34	0.239 360
2	2.42	0.478 719
3	3.51	0.718 079
4	4.68	0.957 439
5	5.82	1.196 799
6	7.18	1.436 158
7	8.42	1.675 518
8	9.56	1.914 878
9	10.68	2.154 237

#### 3.2 用 SPSS 分析 $Z-W$ 定标曲线

将表3中  $W_i, Z_i$  的实验数据输入 SPSS 中,以  $W_i$  为自变量,  $Z_i$  为因变量,应用曲线估计功能,可得出  $Z-W$  曲线方程为

$$Z = 2.018\ 444\ 625\ 805\ 671 \times 10^{11} W + 5.521\ 624\ 104\ 91 \times 10^7 \quad (13)$$

由式(13),得其特性曲线,如图3所示.

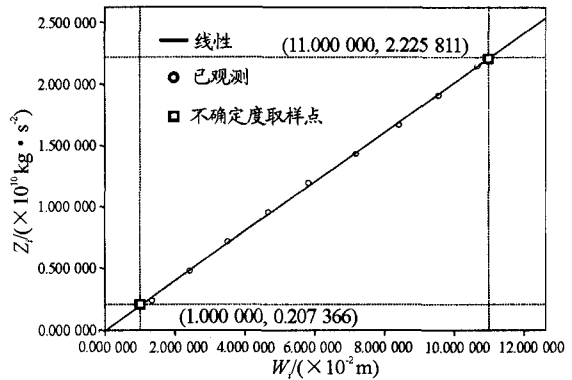


图3  $Z-W$  定标曲线

#### 3.3 对杨氏模量不确定度的估算

根据图3的  $Z-W$  特性曲线,在斜线上取样点  $(W_1, Z_1)$  和  $(W_2, Z_2)$ ,估算  $E$  的不确定度,由曲线方程式(13)可得

$$u(Z_i) = 2.018\ 444\ 625\ 805\ 671 \times 10^{11} u(W_i) \quad (14)$$

由图3斜线上不确定度取样点  $(W_1, Z_1)$  和  $(W_2, Z_2)$  值可得

$$E = \frac{Z_2 - Z_1}{W_2 - W_1} \quad (15)$$

由式(15)可得  $E$  的不确定度公式为

$$u_r(E) = \sqrt{\left[ \frac{u(Z_2 - Z_1)}{Z_2 - Z_1} \right]^2 + \left[ \frac{u(W_2 - W_1)}{W_2 - W_1} \right]^2} \quad (16)$$

由不确定度取样点  $(W_1, Z_1)$  和  $(W_2, Z_2)$ ,结合式(14)、(16)可得杨氏模量实验结果,如表4所示.

表4 杨氏模量实验结果

$u(W_1) = u(W_2)/$ $(\times 10^{-2} \text{ m})$	$u(Z_1) = u(Z_2)/$ $(\times 10^7 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-2})$	$E/$ $(\times 10^{11} \text{ N} \cdot \text{m}^{-2})$	$u_r(E)/$ %
1.6	3.2	$2.018 \pm 0.063$	0.31

### 4 分析与结论

从测量原理所得式(5)可知,只要测量条件具备,理论上系统长度、质量的复合量  $(Z)$  与系统标尺刻度差  $(W)$  应该具有线性关系,若能从实验的角度研究出  $Z_i - W_i$  关系曲线,必然可以标定出钢丝的

杨氏模量,这在实验的测量原理上是一个创新.

由表3实验数据,利用SPSS的曲线估计功能得定标方程式(13)及其图3的 $Z-W$ 定标曲线图.验证了系统长度、质量的复合量( $Z_i$ )与系统标尺刻度差( $W_i$ )具有线性关系,实验所得定标方程式(13)及图3实验曲线与理论分析的式(5)具有一致性.

由表3数据,应用SPSS曲线估计功能得定标方程式(13),可得钢丝杨氏模量  $2.02 \times 10^{11} \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}$ ,对比手册<sup>[10]</sup>中钢丝杨氏模量  $2.018 \times 10^{11} \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}$ ,二者具有较好吻合度,表明拟合的 $W-Z$ 直线是客观的.

为了能较好地实现实验数据线性分析的合理性.实验中选择本底砝码为5 kg(保证钢丝平直),镜尺距离 $D$ 控制在4 m条件下(保证数据的测量质量),负重砝码( $m_i$ )以每组2 kg为标准递增、递减,所对应的望远镜初始标尺刻度 $a_{oi}$ 为12.00 cm,具有较好的重复性, $a_{mi}$ 从13.0 cm变化到24.00 cm,有不同的标尺刻度差( $a_{mi} - a_{oi}$ ).由图3可以看出,表2测量数据的可靠性较高,从而使得实验结果更为合理.

手册中钢丝的杨氏模量为  $2.01 \times 10^{11} \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}$ ,对照表4所得钢丝杨氏模量的实验结果为  $2.018 \times 10^{11} \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}$ ,二者吻合度较高.尤其查看表4中杨氏模量的实验结果,由该实验方案所得杨氏模量的实验值只在千分位上可疑,而以往采用的实验方案

所得杨氏模量的实验值一般为十分位或百分位可疑.应用SPSS的曲线分析估计标定的杨氏模量,可以提高测量数据及实验结果的分析精度,且数据的处理过程及结果直观有效.因此,该实验方案值得推广.

### 参考文献

- 1 林登清,沈佳旺,等.测定钢丝杨氏模量的实验方案研究.物理通报,2013(2):47~50
- 2 窦金兰,王新春,等.对静态拉伸法测杨氏模量实验的改进及误差分析.楚雄师范学院学报,2012,27(6):31~35
- 3 彭涛,王新春,等.电桥法测杨氏模量的实验研究.大学物理实验,2011,24(1):51~54
- 4 张帮.利用迈克尔孙干涉原理测杨氏模量.大学物理实验,2007,20(3):8~10
- 5 李泽涛.利用CCD光电测量系统测量杨氏模量.大学物理实验,2006,25(1):47~49
- 6 王新春,王昆林,等.对液压法测杨氏模量的实验研究.大学物理实验,2011,24(2):21~24
- 7 宋志刚.SPSS 16.0 guide to data analysis.北京:人民邮电出版社,2008.115~186
- 8 杨述武,等.普通物理实验1(力学、热学部分)(第四版).北京:高等教育出版社,2007.12,48~50
- 9 刘才明.大学物理实验中测量不确定度的评定与表示.大学物理,1997,16(8):21~23
- 10 沈佳旺,王新春,等.定标法求钢丝杨氏模量的实验研究.技术物理学,2012,20(2):86~90

## Calibrating Young's Modulus with Static Stretching and SPSS

Yan Wen Wang Xinchun Zhu Feixia Wang Kunlin Si Minzhen

(Department of Physical and Electronics, Chuxiong Normal University, Chuxiong, Yunnan 675000)

**Abstract:** For experiment device used for testing Young's modulus of steel wire, we apply amplification principle of light to deduce the linear relationship among the system length, compound mass amount and difference of system ruler scale. We apply static stretching data, introducing SPSS curve estimation, to analyze experiment data, and obtain the calibration curve among system length, compound mass amount and difference of system ruler scale. In addition, the linear relationship between compound amount and difference of system ruler scale is tested. Therefore, Young's modulus is obtained. We analyze and evaluate the experiment data with the uncertainty confidence probability of 95%. It's shown that we gain reasonable experiment result.

**Key words:** static stretching; amplification principle of light; uncertainty; SPSS curve estimation; Young's modulus